PRÁCTICA 4

FUNCIONES DE VARIABLES ALEATORIAS

Ejercicio 1. Hallar la función de frecuencia de la variable aleatoria $Y =$ ganancia del jugador, en cada uno de los siguientes juegos (ambos tienen un costo de $3 por participar):

a) El jugador tira un dado 5 veces y cobra $2 por cada 6 que obtiene.

b) El jugador tira un dado a lo sumo 5 veces. Si obtiene un 6 en el primer tiro, cobra $10 y deja de jugar. Si no, sigue tirando. Si obtiene un 6 en el segundo tiro, cobra $8 y deja de jugar. Así sucesivamente hasta el quinto tiro. Si saca 6 en el quinto tiro, cobra $2. Si no, no cobra nada (el juego termina de todos modos).

Ejercicio 2. En un concurso de pesca cada pescador paga $100 por participar. Las cantidades de peces que cada uno de los pescadores puede obtener durante el desarrollo del concurso es una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 4.5$. Cada pescador tiene permitido cobrar a lo sumo 8 piezas. Hay un premio de $50 por cada pieza. Calcular la función de frecuencia de la ganancia neta.

Ejercicio 3. Un minorista ha verificado que la demanda de cajones es una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 2$ cajones por semana. El minorista completa su stock los lunes por la mañana a fin de tener 4 cajones al principio de la semana, y no vuelve a completar su stock sino hasta la semana siguiente. Al efectuar un análisis de la actividad de su negocio, se le plantean las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de vender todo su stock durante la semana?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea incapaz de cumplir con un pedido por lo menos?
c) ¿Cuál es el mínimo número de cajones con los que deberá iniciar la semana para que la probabilidad de cumplir con todos los pedidos sea mayor o igual a 0.99?
d) ¿Cuál es el número más probable de cajones pedidos en una semana?
e) ¿Cuál es la distribución del número de cajones vendidos por semana?

Ejercicio 4. Si $Y = (b-a)X + a$, con $X \sim U[0,1]$, se dice que Y tiene densidad uniforme en $[a,b]$ y se denota $Y \sim U[a,b]$. Haga el gráfico de F_Y.

Ejercicio 5. Probar que si U es uniforme en $[0,1]$, $1-U$ también.

Ejercicio 6. Si U es uniforme en $[0,1]$, hallar la función de densidad de $\sqrt{U+2}$.

Ejercicio 7. Si U es uniforme en $[-1,1]$, hallar la función de densidad de U^2.

Ejercicio 8. Sea X una variable aleatoria con distribución $\varepsilon(\lambda)$ y sea F_X su función de distribución acumulada. Hallar la densidad de $Y = F_X(X)$. ¿Qué distribución tiene Y?

Ejercicio 9. Sea X una variable aleatoria con densidad $f(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}$. Halle la distribución de $Y = |X|$.

Ejercicio 10. Sea X una variable aleatoria, $X \sim \varepsilon(\lambda)$; hallar la distribución de $Y = \min(\lambda, X)$ y hallar la descomposición de F_Y.

Ejercicio 11. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{U}[0,1]$. Consideremos también $Y = (\prod_{i=1}^n X_i)^{1/n}$ y $Z = -2n\ln(Y)$. Pruebe que $Z \sim \chi^2_{2n}$.

Ejercicio 12. Una partícula de masa m tiene velocidad aleatoria V, normalmente distribuida con parámetros $\mu = 0$ y σ. Hallar la función de densidad de la energía cinética, $E = \frac{1}{2}mV^2$.

Ejercicio 13. Hallar la densidad de la variable aleatoria $Y = e^X$ cuando $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Esta distribución se denomina *lognormal*. Verificar que $W = \ln(Y)$ tiene distribución normal.

Ejercicio 14. El tiempo semanal Y (en horas) durante el cual cierta máquina industrial no funciona, tiene una distribución gama con $\alpha = 3$ y $\lambda = 0.5$. La pérdida semanal L (en cientos de pesos) para la industria debido a esta baja está dada por:

$$L = 30Y + 8$$

(3000 pesos por hora en que la máquina no funciona más 800 de costo fijo mensual). Calcular la probabilidad de que se pierdan más de 18800 pesos en una semana.

Ejercicio 15. Don Zoilo tiene dos vacas (Aurora y Belinda). La cantidad de leche (en litros) que da Aurora en un día es una variable aleatoria $X \sim \varepsilon(0.2)$. Belinda, en cambio, da 5 litros el 20% de las veces y el resto no da nada. Don Zoilo ordeña a Belinda solamente los dias en que Aurora da menos de 6 litros.

a) ¿Cual es la probabilidad de que Aurora de mas de 6 litros en exactamente dos dias de la proxima semana? (los fines de semana no la ordeñan).

b) ¿Cual es la probabilidad de que Don Zoilo obtenga mas de 8 litros en un día?

c) Con la leche que obtiene de Aurora, Don Zoilo fabrica manteca. La cantidad de manteca (en kilos) que obtiene con X litros de leche es $W = g(X)$ siendo

$$g(X) = \begin{cases} \sqrt[3]{X} & si\ X \leq 8 \\ \frac{1}{7}(X-1)^2 - 5 & si\ 8 < X \leq 15 \\ 2X - 7 & si\ 15 < X \end{cases}$$

Hallar la funcion de densidad de la cantidad de manteca.

Ejercicio 16. La proporción de azúcar artificialmente agregada a un jugo de frutas durante el proceso de producción en una cierta fabrica puede pensarse como una variable aleatoria X. La función de densidad de X es

$$f_X(x) = 12(1-x)x^2 I_{(0,1)}(x)$$

El precio de venta (en pesos) de dicho jugo de frutas, Y, depende de la fracción de azúcar agregada de la siguiente forma

$$Y = -27X^2 + 18X + 17$$

a) Hallar la función de distribución F_Y de la variable Y.

b) Se elige al azar un jugo producido por dicha fabrica. ¿Cual es la probabilidad de que valga mas de 17 pesos?